

PROPORCIONALIDADES. REGLA DE TRES

La proporcionalidad es una relación entre magnitudes medibles. Es uno de los conceptos matemáticos más ampliamente difundido en la población. Esto se debe a que es en buena medida intuitiva y de uso muy común. La proporcionalidad directa es un caso particular de las variaciones lineales. El factor constante de proporcionalidad puede utilizarse para expresar la relación entre cantidades.

Nos introducimos al tema analizando el siguiente ejemplo.

La receta de un pastel de vainilla indica que para cuatro personas se necesitan 200 g de harina, 150 g de mantequilla, cuatro huevos y 120 g de azúcar. ¿Cómo adaptar la receta para cinco personas? Según varios estudios, la mayoría de la gente calcularía las cantidades para una persona (dividiendo entre cuatro) y luego las multiplicaría por el número real de personas, cinco, otras solo le sumarían lo que a una persona le corresponde. Una minoría no siente la necesidad de pasar por las cantidades unitarias (es decir por persona) y multiplicaría los números de la receta por $5/4 = 1,25$.

Se dice que la cantidad de cada ingrediente es proporcional al número de personas y se representa esta situación mediante una tabla de proporcionalidad: coeficiente k no nulo ($\frac{5}{4}$ en el ejemplo) tal que:

$$y_1 = k \cdot x_1; y_2 = k \cdot x_2; \dots \dots \dots y_n = k \cdot x_n$$

Si se consideran $x_1, x_2, \dots, x_n$ e $y_1, y_2, \dots, y_n$ como valores de variables "x" e "y", entonces se dice que estas variables son proporcionales; la igualdad $y = k \cdot x$ significa que y es una función lineal de x.

La tabla del primer ejemplo se puede descomponer en tres de formato dos por dos:

	personas	harina (g)		personas	mantequilla (g)		personas	azúcar(g)
$\times \frac{5}{4}$	4	200	$\times \frac{5}{4}$	4	150	$\times \frac{5}{4}$	4	120
	5	250		5	187,5		5	150

- Ejemplo:**

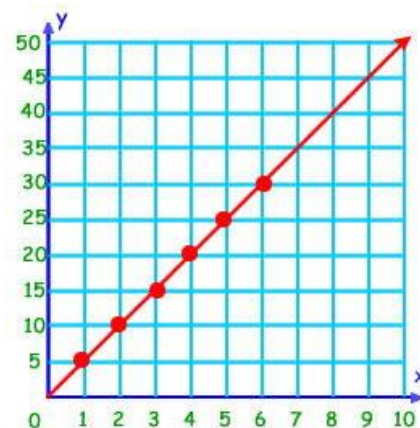
Juan ha utilizado 20 huevos para hacer 4 tortillas iguales. ¿Cuántos huevos necesita para hacer 6 tortillas? ¿Y para hacer 2?

Grafica los resultados hasta 6 tortillas.

Tomando la cantidad de tortillas como variable "x" y la cantidad de huevos como variable "y"; y los valores conocidos de ellos, obtenemos:

$$y = k \cdot x \rightarrow 20 = k \cdot 4 \rightarrow k = \frac{20}{4} = 5$$

x	1	2	3	4	5	6
y	5	10	15	20	25	30



Veamos otro ejemplo:

Dos albañiles construyen un muro de doce metros de superficie en tres horas; ¿Qué superficie construirán cinco albañiles en cuatro horas?

Hay dos parámetros que influyen en la superficie construida: El número de albañiles y el tiempo de trabajo. No hay que resistir a la tentación de aplicar dos veces la proporcionalidad, pero eso sí, explicitando las hipótesis subyacentes.

Afirmar que el trabajo realizado es proporcional al número de albañiles equivale a decir que todos los obreros tienen la misma eficacia al trabajo (son intercambiables); y afirmar que la superficie es proporcional al tiempo de trabajo supone que el rendimiento no cambia con el tiempo: los albañiles no se cansan.

Admitiendo estas dos hipótesis, se puede contestar a la pregunta pasando por una etapa intermedia: ¿Qué superficie construirían dos albañiles en cuatro horas? El parámetro "número de albañiles" tiene un valor fijo, luego se aplica la proporcionalidad con el tiempo (subtabla roja). La superficie construida será multiplicada por $\frac{4}{3}$. Luego, fijando el parámetro tiempo a cuatro horas, y variando el del número de obreros de 2 a 5, la superficie será multiplicada por $\frac{5}{2}$ (la subtabla azul es proporcional).

albañiles	tiempo (horas)	superficie (metros ²)
2	3	12
2	4	16
5	4	40

Diagrama de proporcionalidad: Una flecha roja indica la transición de 3 a 4 horas (multiplicación por $\frac{4}{3}$). Una flecha azul indica la transición de 2 a 5 albañiles (multiplicación por $\frac{5}{2}$).

Luego, el resultado es: $12 \text{ m}^2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{2} = 40 \text{ m}^2$

La proporcionalidad múltiple se resuelve así, multiplicando por los coeficientes correspondientes a cada factor:

factor 1	factor 2	...	factor n	valor
v_1	v_2	...	v_n	a
v'_1	v'_2	...	v'_n	a'

$$a' = a \times \frac{v'_1}{v_1} \times \frac{v'_2}{v_2} \times \dots \times \frac{v'_n}{v_n}$$

MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

*Si dos magnitudes son tales que a **doble, triple...** cantidad de la primera corresponde **doble, triple...** cantidad de la segunda, entonces se dice que esas magnitudes son **directamente proporcionales**.*

Esta manera de funcionar de las proporciones nos permite adentrarnos en lo que llamaremos regla de tres y que nos servirá para resolver una gran cantidad de problemas.

REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA

Ejemplo 1.

En 50 litros de agua de mar hay 1.300 gramos de sal. ¿Cuántos litros de agua de mar contendrán 5.200 gramos de sal?

Como en doble cantidad de agua de mar habrá doble cantidad de sal; en triple, triple, etc. Las magnitudes cantidad de agua y cantidad de sal son directamente proporcionales.

Si representamos por x el número de litros que contendrá 5200 gramos de sal, y formamos la siguiente tabla:

Litros de agua	50	x
Gramos de sal	1300	5200

Se verifica la proporción $\frac{50}{1300} = \frac{x}{5200} \Rightarrow x = \frac{50 \cdot 5200}{1300} = \mathbf{200 \text{ litros de agua.}}$

En la práctica esto se suele disponer del siguiente modo:

En 50 l hay 1300 g de sal	-----	50 litros	-----	1300 gramos
En x l habrá 5200 g de sal	-----	x litros	-----	5200 gramos

Esta forma de plantear y resolver problemas sobre proporciones se conoce con el nombre de regla de tres simple directa.

Ejemplo 2.

Un automóvil gasta 5 litros de nafta cada 100 km. Si quedan en el depósito 6 litros, ¿cuántos kilómetros podrá recorrer el automóvil?

5 litros 100 km

$$6 \text{ litros } x \text{ km} \quad \rightarrow \quad x = \frac{6 \text{ litros} \cdot 100 \text{ km}}{5 \text{ litros}} = \mathbf{120 \text{ km}}$$

Luego, con 6 litros el automóvil recorrerá 120 km.

MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

Si dos magnitudes son tales que a **doble, triple...** cantidad de la primera corresponde la **mitad, la tercera parte...** de la segunda, entonces se dice que esas magnitudes son **inversamente proporcionales**.

Ejemplo.

Si 3 hombres necesitan 24 días para hacer un trabajo, ¿cuántos días emplearán 18 hombres para realizar el mismo trabajo?

En este caso a doble número de trabajadores, el trabajo durará la mitad; a triple número de trabajadores, el trabajo durará la tercera parte, etc. Por tanto, las magnitudes son inversamente proporcionales (también se dice que son indirectamente proporcionales).

Formamos la tabla:

Hombres	3	6	9		18
Días	24	12	8		x

Vemos que los productos $3 \cdot 24 = 6 \cdot 12 = 9 \cdot 8 = 72$

$$\text{Por tanto } 18 \cdot x = 72 \quad \rightarrow \quad x = \frac{72}{18} = \mathbf{4}$$

O sea que los 18 hombres tardarán 4 días en hacer el trabajo

Nótese que aquí la constante de proporcionalidad, que es 72, se obtiene multiplicando las magnitudes y que su producto será siempre igual.

Importante: Como regla general, la constante de proporcionalidad entre dos magnitudes inversamente proporcionales se obtiene multiplicando las magnitudes entre sí, y el resultado se mantendrá constante.

REGLA DE TRES SIMPLE INVERSA (O INDIRECTA)

Ejemplo 1.

Un ganadero tiene forraje suficiente para alimentar 220 vacas durante 45 días. ¿Cuántos días podrá alimentar con la misma cantidad de forraje a 450 vacas?

Vemos que con el mismo forraje, si el número de vacas se duplica, tendrá para la mitad de días; a triple número de vacas, tercera parte de días, etc. Por tanto, son magnitudes inversamente proporcionales.

Cantidad de vacas	220	450
Cantidad de días	45	x

$$\text{Tiene que ser entonces } 220 \cdot 45 = 450 \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{220 \text{ vacas} \cdot 45 \text{ días}}{450 \text{ vacas}} = \mathbf{22 \text{ días}}$$

En la práctica esto se suele disponer del siguiente modo:

220 vacas tienen para 45 días -----

450 vacas tienen para x días -----

220 vacas ----- 45 días

450 vacas ----- x días

Luego 450 vacas podrán comer 22 días.

Esta forma de plantear y resolver problemas sobre proporciones se conoce con el nombre de regla de tres simple inversa.

Ejemplo 2.

Para envasar cierta cantidad de vino se necesitan 8 toneles de 200 litros de capacidad cada uno. Queremos envasar la misma cantidad de vino empleando 32 toneles. ¿Cuál deberá ser la capacidad de esos toneles?

8 toneles 200 litros

32 toneles x litros $\rightarrow x = \frac{8 \text{ toneles} \cdot 200 \text{ litros}}{32 \text{ toneles}} = 50 \text{ litros}$

Debemos tener 32 toneles de 50 litros de capacidad para poder envasar la misma cantidad de vino.

PROPORCIONALIDADES EN MAGNITUDES FÍSICAS

En Física, se llaman magnitudes a aquellas propiedades que pueden medirse y expresar su resultado mediante un número y una unidad. Son magnitudes: la longitud, la masa, el volumen, la intensidad de corriente eléctrica, el voltaje, etc.

Muchas de estas magnitudes que usamos en Física están relacionadas entre ellas mediante leyes o principios (ej. Ley de Ohm, Principio de masa, etc.), expresados mediante ecuaciones.

En las más sencillas o básicas, aparecen relaciones de proporcionalidad como las desarrolladas y analizadas en los párrafos anteriores. Es por ello que esas relaciones de proporcionalidad nos van a ayudar a resolver situaciones que se presentan en nuestras situaciones problemáticas, recordando que la matemática es una de las ciencias auxiliares de la Física.

A continuación se dan algunos ejemplos de ecuaciones que relacionan magnitudes Físicas.

Ejemplo 1. Ley de Ohm.

Es la ley que relaciona la intensidad de corriente que circula en un circuito eléctrico con la tensión aplicada y la resistencia que opone el circuito al paso de esa corriente, dice: La intensidad de corriente que circula en un circuito eléctrico es directamente proporcional a la tensión aplicada e inversamente proporcional a la resistencia del circuito.

Su expresión:

$$I (\text{intensidad de corriente}) = \frac{V (\text{tensión aplicada})}{R (\text{resistencia})}$$

Ejemplo 2. Principio de masa (segunda ley de Newton)

En esta ley fundamental de la mecánica, se relacionan: la fuerza aplicada un cuerpo, la aceleración que adquiere ese cuerpo y la masa del cuerpo. Dice: La aceleración que adquiere un cuerpo bajo los efectos de una fuerza es directamente proporcional a dicha fuerza e inversamente proporcional a su masa.

Su expresión:

$$a (\text{aceleración}) = \frac{F (\text{fuerza})}{m (\text{masa})}$$

Ejemplo 3. Movimiento Rectilíneo Uniforme

Es el tipo de movimiento que se desarrolla a velocidad constante del móvil y sobre una línea recta. Considerando que la velocidad es constante, es fácil deducir que la distancia recorrida se obtiene multiplicando la velocidad del móvil por el tiempo que se desplaza. O sea:

$$x (\text{distancia recorrida}) = v (\text{velocidad}) * t (\text{tiempo})$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Indica si son magnitudes directamente proporcionales o no:
 - a) Número de comensales y comida que debe haber en la mesa.
 - b) Distancia y combustible empleado.
 - c) Velocidad y tiempo empleado en recorrer una distancia.
 - d) El amor que se siente y la belleza de la persona amada.
 - e) Número de albañiles y tiempo que se tarda en acabar la obra.
 - f) Número de trabajadores y producción en una fábrica.
 - g) Número de grifos abiertos y cantidad de agua que cae a un depósito.
 - h) Número de grifos abiertos y tiempo que se tarda en llenar un depósito.
2. Un coche ha tardado 42 minutos en recorrer 70 km. Suponiendo que va a la misma velocidad, contesta a las siguientes cuestiones:
 - a) ¿Cuánto tardará en recorrer 150 km?
 - b) ¿Cuántos kilómetros recorrerá en dos horas y tres minutos?
3. Un automóvil ha tardado en hacer el recorrido Venado Tuerto-Río Cuarto tres horas y cuarto a una media de 100 km/h. ¿Cuánto tardará un autobús a una media de 90 km/h?
4. ¿Qué masa tiene un cuerpo que se acelera a 5 m/s^2 , cuando se le aplica una fuerza que acelera a un cuerpo de 25 kg de masa a $7,5 \text{ m/s}^2$?
5. Se tiene un circuito eléctrico al cual se le aplica una tensión de 50 Voltios y circula por él una corriente de 5 Amperios. ¿Qué intensidad de corriente circulará en un circuito que tenga la mitad de la resistencia que el anterior? ¿Y si la resistencia fuera el cuádruplo?
6. Para acelerar a un cuerpo a 5 m/s^2 se requiere aplicar una fuerza de 75 Newton. ¿Qué aceleración adquirirá un cuerpo de masa igual al triple que el anterior? ¿Y uno de masa igual a la mitad?
7. Un ciclista recorrió 60 km en cuatro horas. ¿Qué distancia recorrerá en la misma cantidad de tiempo un atleta que corre a $\frac{1}{4}$ de la velocidad del ciclista? ¿Qué tiempo empleará el atleta en recorrer 60 km?
8. Calcular la intensidad de corriente que circula por un circuito de 24 Ohmios de resistencia, cuando se le aplica una tensión de 48 Voltios. ¿Qué intensidad circularía si la resistencia se reduce a la cuarta parte? ¿Y si la tensión aplicada se triplica?
9. ¿Qué velocidad tendrá un móvil que en dos horas recorre la misma distancia que otro que se desplaza a 30 km/h durante tres horas?
10. Un automóvil recorre 240 km en tres horas. ¿Cuántos habrá recorrido en 2 horas? ¿Y en cuatro horas? Confeccionar una tabla indicando los km recorridos hasta las primeras 5 horas. Establecer la constante de proporcionalidad.