

CARRERA: Técnico Superior en Seguridad, Higiene y Medio Ambiente en el Trabajo

MATERIA: Elementos de Matemática y Estadística

PROFESOR: Emiliano Druetta

PROPORCIONALIDAD

1. Proporción numérica

Razón entre dos números

Recordando lo visto en el curso anterior, una **razón** entre dos números a y b es el cociente entre a y b.

$$\text{Razón entre a y b} = \frac{a}{b}.$$

Una proporción numérica es una igualdad entre dos razones numéricas.

En cualquier proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

a y d se llaman **extremos**, b y c **medios**.

2. Proporcionalidad directa

Constante de proporcionalidad

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** si al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número, la otra queda multiplicada (o dividida) por el mismo número.

Si a un valor m_1 de la primera magnitud le corresponde un valor m_2 de la segunda magnitud, se puede comprobar que el cociente o razón entre estos dos valores es siempre constante. A esta cantidad se le llama **constante o razón de proporcionalidad directa**.

$$\text{Razón de proporcionalidad: } r = \frac{m_2}{m_1}.$$

Regla de tres simple

Una forma muy fácil de resolver una actividad de proporcionalidad directa es un procedimiento llamado **regla de tres**.

Consiste en aprovechar la razón o constante de proporcionalidad directa para calcular el cuarto término.

Reducción a la unidad

Sin embargo la regla de tres se convierte en un procedimiento mecánico, que aunque permite resolver de forma fácil cualquier actividad, no se razona de forma conveniente su resolución.

Otro procedimiento que podemos llamar de **reducción a la unidad**, consiste en calcular el valor de la segunda magnitud correspondiente a la unidad de la primera. Este valor es el que se ha llamado anteriormente constante de proporcionalidad directa. A partir de aquí es más fácil calcular el valor final de la segunda magnitud.

PROBLEMA RESUELTO

Si 12 bolas de acero iguales tienen un peso de 7200 gramos, ¿cuánto pesarán 50 bolas iguales a las anteriores?

Regla de tres directa

1ª magnitud Nº bolas	2ª magnitud gramos
12	7200
50	x
$\frac{7200}{12} = \frac{x}{50} \Rightarrow x = \frac{7200 \cdot 50}{12} = 30000$	

Solución: 30000 gramos = 30 kg.

Reducción a la unidad

1ª magnitud Nº bolas	2ª magnitud gramos
12	7200
↓ : 12	↓ : 12
1	600
↓ x 50	↓ x 50
50	30000

Solución: 30000 gramos = 30 kg.

3. Proporcionalidad inversa

Constante de proporcionalidad

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** si al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número, la otra queda dividida (o multiplicada) por el mismo número.

Si a un valor m_1 de la primera magnitud le corresponde un valor m_2 de la segunda magnitud, se puede comprobar que el producto de estos dos valores es siempre constante. A este producto se le llama **constante de proporcionalidad inversa**.

$$\text{Razón de proporcionalidad: } m_1 \cdot m_2.$$

Regla de tres inversa

Una forma muy fácil de resolver una actividad de proporcionalidad inversa es un procedimiento llamado regla de tres.

Consiste en aprovechar la constante de proporcionalidad inversa para calcular el cuarto término.

Reducción a la unidad

Sin embargo la regla de tres se convierte en un procedimiento mecánico, que aunque permite resolver de forma fácil cualquier actividad, no se razona de forma conveniente su resolución.

Otro procedimiento que podemos llamar de reducción a la unidad, consiste en calcular el valor de la segunda magnitud correspondiente a la unidad de la primera. Este valor es el que se ha llamado anteriormente constante de proporcionalidad inversa. A partir de aquí es más fácil calcular el valor final de la segunda magnitud.

PROBLEMA RESUELTO

6 fotocopadoras tardan 6 horas en realizar un gran número de copias, ¿cuánto tiempo tardarían 4 fotocopadoras en realizar el mismo trabajo?

Regla de tres inversa

1ª magnitud fotocopadoras	2ª magnitud horas
6	6
4	x
$6 \cdot 6 = 4 \cdot x \Rightarrow x = \frac{6 \cdot 6}{4} = 9$	
Solución: 9 horas.	

Reducción a la unidad

1ª magnitud fotocopadoras	2ª magnitud horas
6	6
↓ : 6	↓ x 6
1	36
↓ x 4	↓ : 80
4	9
Solución: 9 horas.	

4. Porcentajes

Tanto por ciento de una cantidad

Calcular el r % de una cantidad C equivale a resolver una actividad de magnitudes directamente proporcionales: "Si al valor 100 de la primera magnitud le corresponde el valor C de la segunda, entonces al valor r de la primera magnitud le corresponde el valor buscado r % de C".

$$\begin{array}{ccc} 100 & \text{-----} & C \\ r & \text{-----} & r \% \text{ de } C \end{array}$$

Sin embargo al desarrollar este procedimiento se puede comprobar que para calcular el r % de C se multiplica C por r y se divide por 100.

$$r\% \text{ de } C = \frac{r \cdot C}{100}$$

La capacidad de un pantano es de 53 Hm³. ¿Cuántos litros de agua tiene si está lleno en un 15%?

Regla de tres directa

1ª magnitud Porcentaje	2ª magnitud Hm ³
100	53
15	x

$$\frac{53}{100} = \frac{x}{15} \Rightarrow x = \frac{53 \cdot 15}{100} = 7,95$$

Solución: 7,95 Hm³ = 7950000000 litros

Directamente:

$$15\% \text{ de } 53 = \frac{15 \cdot 53}{100} = 7,95$$

Tanto por ciento correspondiente a una proporción

Calcular el % que representa una cantidad P de un total C equivale a resolver una actividad de magnitudes directamente proporcionales: "Si al valor C de la primera magnitud le corresponde el valor 100 de la segunda, entonces al valor P de la primera magnitud le corresponde el porcentaje buscado."

$$\begin{array}{rcl} \text{C} & \text{-----} & 100 \\ \text{P} & \text{-----} & ? \end{array}$$

Sin embargo al desarrollar este procedimiento se puede comprobar que para calcular el % se divide P por C y se multiplica por 100.

$$\frac{P}{C} \cdot 100 \%$$

En mi clase hay 32 estudiantes. Si hay 20 alumnas, ¿qué porcentaje del total representan las alumnas y los alumnos?

Regla de tres directa

1ª magnitud	2ª magnitud
Estudiantes	Porcentaje

$$\begin{array}{rcl} 32 & \text{-----} & 100 \\ 20 & \text{-----} & x \end{array}$$

$$\frac{100}{32} = \frac{x}{20} \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 20}{32} = 62,5$$

Directamente:

$$\frac{20}{32} \cdot 100 = 62,5 \%$$

Solución:

Alumnas: 20 de 32 → 62,5 %
Alumnos: 12 de 32 → 37,5 %

PROBLEMAS RESUELTOS

El censo electoral de una población es de 24600 personas. En unas elecciones un partido político ha obtenido el 42,5 % de los votos. ¿Cuántas personas lo han votado?

$$42,5\% \text{ de } 24600 = \frac{42,5 \cdot 24600}{100} = 24600 \cdot 0,425 = 10455 \text{ personas}$$

Una máquina fabrica al día 450 piezas de las que 18 presentan algún defecto y se desechan. ¿Qué porcentaje de piezas defectuosas fabrica la máquina?

$$\frac{18}{450} \cdot 100 = 4 \%$$

El 34% de las personas asistentes a un congreso son españoles. Sabiendo que hay 85 españoles, ¿cuántas personas asisten al congreso?

$$C \cdot 0,34 = 85 \Rightarrow C = \frac{85}{0,34} = 250$$

Resuelve los siguientes problemas:

- 1- Halla el valor de x para que se cumplan las siguientes proporciones.

a) $\frac{12}{3} = \frac{4}{x}$

b) $\frac{9}{60} = \frac{x}{40}$

c) $\frac{15}{x} = \frac{20}{4}$

- 2- Se pagaron \$4500 por la compra de 5 calculadoras. ¿Cuánto valen 14 calculadoras?
- 3- Una tubería tiene una fuga de agua y pierde 322 litros de agua cada 7 minutos. ¿En cuánto tiempo se perderán 2300 litros?
- 4- Un trabajo realizado en un taller de autos vale \$2500. Por pagarlo al contado me hacen un descuento del 8%. ¿Cuánto me descontaron? ¿Cuánto tengo que pagar?
- 5- Un reloj valía \$320, pero el relojero me lo rebajó y lo pagué finalmente \$288. ¿Qué porcentaje me rebajó?
- 6- Nueve personas realizan un trabajo en 16 días. ¿Cuánto tiempo tardarán en realizar el mismo trabajo 8 personas?
- 7- Se dispone de 420 litros de agua almacenados en 7 depósitos iguales. ¿Cuántos litros de agua contendrán 13 depósitos iguales a los anteriores?

- 8- Completar la tabla sabiendo que las dos magnitudes son directamente proporcionales:

24	8	B	40	D	6,6	F
60	A	30	c	75	E	0,25

- 9- Un grifo echa 20 litros de agua por minuto y tarda en llenar un depósito una hora y 30 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en llenar el mismo depósito un grifo que eche 30 litros de agua por minuto?
- 10- Una máquina, A, fabrica 280 tornillos y salen 14 defectuosos. Otra máquina, B, fabrica 275 tornillos y salen 11 defectuosos.
a) ¿Cuál es el porcentaje de tornillos defectuosos fabricados por cada máquina?
b) ¿Cuál de las dos máquinas conviene utilizar?
- 11- Para imprimir unos folletos publicitarios, 9 impresoras han funcionado 8 horas diarias durante 40 días. ¿Cuántos días tardarán en imprimir el mismo trabajo 6 impresoras funcionando 10 horas diarias?
- 12- El 45 % de los alumnos de un instituto ha aprobado todas las asignaturas al final del curso. Sabiendo que han aprobado 234 alumnos, ¿cuántos estudiantes hay en el instituto?
- 13- Luis y Carlos cambian divisas. Luis cambia 5 500 soles del Perú y le dan 1 270 euros. A Carlos le dan 1 062 euros.
a) ¿Cuántos soles ha cambiado Carlos?
b) ¿Cuál es el cambio euro-sol?
- 14- Un análisis realizado en una granja a 7200 animales ha permitido detectar un 24% de animales enfermos. Se emplea como tratamiento una dosis de vitamina A en 2 de cada 3 animales. ¿Cuántas dosis de vitamina A se necesitan?
- 15- Para abonar un campo de cultivo se han necesitado 42 300 kilogramos de un cierto abono que contiene un 25% de nitratos. ¿Cuántos kilogramos se necesitarían de otro tipo de abono que contiene un 36% de nitratos, para que el campo recibiese la misma cantidad de nitratos?
- 16- Luis prepara una limonada con 12 litros de agua y 8 litros de jugo de limón. ¿Cuál es el porcentaje de jugo de limón que hay en la limonada?
- 17- Daniela tiene un comercio y recarga un 40% al costo de los productos para venderlos. Si vende una campera a \$1600. ¿Qué ganancia obtiene por la misma?